

广东省 2011 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1. 下列极限等式中，正确的是（ ）

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$

C. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$

2. 若函数是 $f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 2+x, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $a =$ （ ）

A. $-\ln 2$

B. $\ln 2$

C. 2

D. e^x

3. 已知 $f(x)$ 的二阶导数存在，且 $f(2) = 1$ ，则 $x=2$ 是函数的 $F(x) = (x-2)^2 f(x)$ 的（ ）

A. 极小值点

B. 最小值点

C. 极大值点

D. 最大值点

4. 若 $\int_1^2 xf(x) dx = 2$ ，则 $\int_0^3 f(\sqrt{x+1}) dx =$ （ ）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

5. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(2x^2 - y^2)}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ ，则 $f'_y(0, 0) =$ （ ）

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 若当 $x \rightarrow \infty$ 时， $\frac{kx}{(2x+3)^4}$ 与 $\frac{1}{x^3}$ 是等价无穷小，则常数 $k =$ _____.7. 圆 $\begin{cases} x = t - t^3 \\ y = 2t \end{cases}$ ，则 $\frac{dy}{dx}|_{t=0} =$ _____.8. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且 $y = \int_0^{2x} f\left(\frac{1}{2}t\right) dt - 2 \int (1+f(x)) dx$ ，则 $y' =$ _____.



9. 若二元函数 $Z = \frac{4x - 3y}{y^2} (y \neq 0)$, 则 $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} =$ _____.

10. 设平面区域 D 由直线 $y = x$, $y = 2x$ 及 $x = 1$ 围成, 则二重积分 $\iint_D x d\sigma =$ _____.

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{\sin x} \right)$.

12. 已知函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x) = \ln(\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x})$, 求 $f^{(n)}(0)$.

13. 求曲线 $y = x - \arctan kx (k < 0)$ 的凹凸区间和拐点.

14. 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx (x > 1)$.

15. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2}, & x > 0 \\ x \cos x, & x \leq 0 \end{cases}$, 计算定积分 $\int_{-\pi}^1 f(x) dx$.

16. 求微分方程 $y'' - 2y' + 10y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 3$ 的特解.

17. 已知二元函数 $Z = (3x + y)^{2y}$, 求偏导数 $\frac{\partial Z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial Z}{\partial y}$.

18. 化二次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy$ 为极坐标形式的二次积分, 并求其值.

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 过坐标原点作曲线 $y = e^x$ 的切线 l , 切线 l 与曲线 $y = e^x$ 及 y 轴围成的平面图形标记为 G , 求:

(1) 切线 l 的方程.

(2) G 的面积.

(3) G 绕 x 轴旋转而完成的旋转体体积.

20. 若定义在区间 $(0, \pi)$ 内的可导函数 $y = f(x)$ 满足 $xy' = (x \cot x - 1)y$, 且 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的表达式.

(2) 证明: 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内单调递减.

