

广东省 2013 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时，下列无穷小量中，与 x 不等价的无穷小量是（ ）

- A . $\ln(x+1)$ B . $\arcsin x$ C . $1 - \cos x$ D . $\sqrt{1+2x} - 1$

2. 曲线 $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ ()

- A . 只有水平渐近线 B . 只有铅垂渐近线
C . 既有水平渐近线也有铅垂渐近线 D . 无渐近线

3. 下列函数中，有区间 $[-1,1]$ 上满足罗尔(Rolle)定理条件的是 ()

- A . $y = x^{\frac{2}{3}}$ B . $y = |x|$ C . $y = x^{\frac{4}{3}}$ D . $y = x^{\frac{5}{3}}$

4. 设函数 $f(x) = x \sin x + \cos x$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值， $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的极大值
B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值， $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的极小值
C. $f(0)$ 和 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 都是 $f(x)$ 的极小值
D. $f(0)$ 和 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 都是 $f(x)$ 的极大值

5. 若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足 $F'(x) = f(x)$ ($x \in R$)，则下列等式成立的是 ()

- A. $\int \frac{1}{x} F(2 \ln x + 1) dx = 2f(\ln x + 1) + C$
B. $\int \frac{1}{x} F(2 \ln x + 1) dx = \frac{1}{2} f(2 \ln x + 1) + C$
C. $\int \frac{1}{x} f(2 \ln x + 1) dx = 2F(2 \ln x + 1) + C$
D. $\int \frac{1}{x} f(2 \ln x + 1) dx = \frac{1}{2} F(2 \ln x + 1) + C$



**二、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）**

6. 要使函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$ 在 $x=1$ 处连续，应补充定义 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 曲线 $\begin{cases} x = 3^t \\ y = \tan t \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} x(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$, 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 已知平面图形 $G = \{(x, y) \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$, 将图形 G 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 D 为圆环域: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 则二重积分 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题（本大题共8小题，每小题6分，共48分）

11. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$.

12. 已知函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且 $f(0) \cdot f'(0) \neq 0$,

求常数 a 和 b 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{af(x) + bf(2x) - f(0)}{x} = 0$.

13. 求由方程 $xy \ln y + y = e^{2x}$ 所确定的隐函数在 $x=0$ 处的导数 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$.

14. 求曲线 $y = \ln(\sqrt{x^2 + 4} + x)$ 的凹、凸区间及其拐点坐标.

15. 计算不定积分 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$.

16. 计算定积分 $\int_0^2 \frac{x}{(x+2)\sqrt{x+1}} dx$.

17. 求二元函数 $z = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$ 的全微分 dz 及二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

18. 求微分方程 $y'' - 2y' + (1-k)y = 0$ (其中常数 $k \geq 0$) 的通解.

四、综合题（本大题共2小题，第19小题10分，第20小题12分，共22分）

19. 交换二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_0^{(2x+1)(2y+1)} \frac{1}{\ln y + 1} dy$ 的积分次序，并求 I 的值.

20. 已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的非负可导函数, 且曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0, x = 0$ 及 $x = t (t \geq 0)$ 围成的曲边梯形的面积为 $f(t) - t^2$.

(1) 求函数 $f(x)$.

(2) 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > x^2 + \frac{x^3}{3}$.

