

## 广东省 2013 年普通高等学校本科插班生招生考试

### 高等数学

#### 一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1. 当  $x \rightarrow 0$  时，下列无穷小量中，与  $x$  不等价的无穷小量是（ ）

A.  $\ln(x+1)$

B.  $\arcsin x$

C.  $1 - \cos x$

D.  $\sqrt{1+2x} - 1$

2. 曲线  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  （ ）

A. 只有水平渐近线

B. 只有铅垂渐近线

C. 既有水平渐近线也有铅垂渐近线

D. 无渐近线

3. 下列函数中，有区间  $[-1, 1]$  上满足罗尔(Rolle)定理条件的是（ ）

A.  $y = x^{\frac{2}{3}}$

B.  $y = |x|$

C.  $y = x^{\frac{4}{3}}$

D.  $y = x^{\frac{5}{3}}$

4. 设函数  $f(x) = x \sin x + \cos x$ ，则下列结论正确的是（ ）

A.  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值， $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  是  $f(x)$  的极大值

B.  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值， $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  是  $f(x)$  的极小值

C.  $f(0)$  和  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  都是  $f(x)$  的极小值

D.  $f(0)$  和  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  都是  $f(x)$  的极大值

5. 若函数  $f(x)$  和  $F(x)$  满足  $F'(x) = f(x) (x \in \mathbb{R})$ ，则下列等式成立的是（ ）

A.  $\int \frac{1}{x} F(2\ln x + 1) dx = 2f(\ln x + 1) + C$

B.  $\int \frac{1}{x} F(2\ln x + 1) dx = \frac{1}{2} f(2\ln x + 1) + C$

C.  $\int \frac{1}{x} f(2\ln x + 1) dx = 2F(2\ln x + 1) + C$

D.  $\int \frac{1}{x} f(2\ln x + 1) dx = \frac{1}{2} F(2\ln x + 1) + C$



## 二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 要使函数  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$  在  $x=1$  处连续，应补充定义  $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 曲线  $\begin{cases} x = 3^t \\ y = \tan t \end{cases}$  在  $t=0$  相应的点处的切线方程是  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 函数  $f(x) = \begin{cases} x(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$ , 在  $x=0$  处的左导数  $f'_-(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 已知平面图形  $G = \{(x, y) \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$ , 将图形  $G$  绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体体积  $V = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 设  $D$  为圆环域:  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ , 则二重积分  $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ .

12. 已知函数  $f(x)$  具有连续的一阶导数，且  $f(0) \cdot f'(0) \neq 0$ ,

求常数  $a$  和  $b$  的值，使  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{af(x) + bf(2x) - f(0)}{x} = 0$ .

13. 求由方程  $xy \ln y + y = e^{2x}$  所确定的隐函数在  $x=0$  处的导数  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ .

14. 求曲线  $y = \ln(\sqrt{x^2 + 4} + x)$  的凹、凸区间及其拐点坐标.

15. 计算不定积分  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ .

16. 计算定积分  $\int_0^2 \frac{x}{(x+2)\sqrt{x+1}} dx$ .

17. 求二元函数  $z = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$  的全微分  $dz$  及二阶偏导数  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

18. 求微分方程  $y'' - 2y' + (1-k)y = 0$  (其中常数  $k \geq 0$ ) 的通解.

## 四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 交换二次积分  $I = \int_0^1 dx \int_{\ln y}^{\frac{(2x+1)(2y+1)}{\ln y + 1}} dy$  的积分次序，并求  $I$  的值.

20. 已知  $f(x)$  是定义在区间  $[0, +\infty)$  上的非负可导函数，且曲线  $y = f(x)$  与直线  $y=0, x=0$  及  $x=t (t \geq 0)$  围成的曲边梯形的面积为  $f(t) - t^2$ .

(1) 求函数  $f(x)$ .

(2) 证明：当  $x > 0$  时， $f(x) > x^2 + \frac{x^3}{3}$ .

